UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Concursul de Matematică - Informatică

organizat de către

Departamentul de Matematică şi Informatică, Facultatea de Ştiinţe,
Centrul Universitar Nord din Baia Mare, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

5 Aprilie 2014

Toate subiectele sunt obligatorii. Pentru fiecare subiect este necesară rezolvarea completă. Se acordă din oficiu **10 puncte**. Timp de lucru **trei ore!**

Subiectul I – 30 puncte

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=2e^x+3x^2-2x+5$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculaţi derivata f' şi arătaţi că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

b) Arătaţi că funcţia f nu este surjectivă.

c) Calculaţi $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$.

a) Calculaţi $f(1)$.

b) Arătaţi că $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

c) Calculaţi integrala $I(x)=\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\operatorname{arctg}t}{t^2+t+1}\,dt$.

Subiectul II – 30 puncte

1. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases}ax+y+z=4\\x+y+z=3\\x+2y+z=4\end{cases}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Calculaţi determinantul matricei A.

b) Pentru ce valori ale parametrului real $a\in\mathbb{R}$ sistemul considerat este compatibil.

c) Pentru $a=2$, să se rezolve sistemul.

2. Pe mulţimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se defineţe legea de compoziţie "$*$" prin

$$x*y=x^{\lg y},\ \ \forall x,y\in G.$$

a) Arătaţi că pentru orice $x,y\in G$ are loc $x*y\in G$.

b) Arătaţi că $(G,*)$ este grup abelian.

c) Rezolvaţi în mulţimea G ecuaţia $x*x*x=10^{1000}$.

Subiectul III – 30 puncte

1. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(5,1)$, $C(1,5)$ şi $D(0,4)$.

a) Determinaţi lungimea segmentului $[AB]$.

b) Calculaţi aria patrulaterului $ABCD$.

c) Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de dreapta BC.

2. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreapta (d) de pantă $m\in\mathbb{R}$, care conţine punctul $A(0,5)$ şi intersectează dreptele $(d_1):\ x-2=0$ şi $(d_2):\ x-3=0$ în punctele B, respectiv C.

a) Calculaţi aria triunghiului ΔOBC.

b) Arătaţi că pentru $m=-1$ triunghiul ΔOBC este isoscel.

c) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care lungimea segmentului BC este minimă.