

Concursul MATEINFO, 2021

1. S1-1

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Dacă a este partea fracționară a numărului $(2 - \sqrt{5})^2$, atunci

- $a = 9 - \sqrt{80}$ (100%)
- $a = 4\sqrt{5}$
- $a = 1 - \sqrt{80}$
- $a = \sqrt{5} - 2$

2. S1-2

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a \in (0, \infty)$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = a(x + 2a)$. Dacă z este abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f \circ f$ cu axa Ox , atunci

- $z + 2(a + 1) = 0$ (100%)
- $z - 2(a + 1) = 0$
- $z = 0$
- $z + 2a = 0$

3. S1-3

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Dacă S este mulțimea tuturor soluțiilor ecuației $\log_3(x^2) - 2\log_{-x} 9 - 2 = 0$, atunci

- $S = \left\{-9, -\frac{1}{3}\right\}$ (100%)
- $S = \emptyset$
- $\text{card}(S) = 3$
- $\text{card}(S) = 1$

4. S1-4

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Dacă N reprezintă numărul numerelor de șase cifre care se pot forma astfel încât cifra 1 să apară o dată, cifra 2 să apară de două ori și cifra 3 să apară de trei ori, atunci

- $N = 60$ (100%)
- $N = 720$
- $N = 120$
- $N = 45$

5. S1-5

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie numerele reale $a, b, m, n, p, q \in \mathbb{R}$. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, a)$, $B(b, 3)$, $C(m, n)$ și $D(p, q)$. Dacă patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram care are punctul de intersecție al diagonalelor situat pe dreapta de ecuație $y = 1 - x$, atunci

- $1 + a + b + m + n + p + q = 0$ (100%)
- $(a + m + n)(b + p + q) \neq 0$
- $a + b + m + n + p + q = 1$
- $(a + m + n)^2 + (b + p + q)^2 = 0$

6. S1-6

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a, b, c \in (0, \infty)$, cu $a < b < c$, lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC . Dacă r este lungimea razei cercului înscris triunghiului ABC , atunci

- $a + b = c + 2r$ (100%)
- $r = a + b - c$
- $a + b = c + r$
- $2r = a + b + c$

7. S2-1

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie A și B două matrice din mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $AB = \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 30 & 26 \end{pmatrix}$.

Dacă $BA = \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ n & 26 \end{pmatrix}$, atunci

- $n = 24$ (100%)
- $n = 30$

- $n + 24 = 0$
- $n + 30 = 0$

8. **S2-2**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $A^n =$

$\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ a_n & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, atunci

- $a_n = 3^n - 2^n$, oricare ar fi $n \geq 1$ (100%)
- $a_n = n^2 + n - 1$, oricare ar fi $n \geq 1$
- $a_n = 5n^2 - 11n + 7$, oricare ar fi $n \geq 1$
- $a_n = 3^{2n} - 2^{3n}$, oricare ar fi $n \geq 1$

9. **S2-3**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ și matricele $A = \begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 3b & 0 \\ 0 & 0 & 2 + 3c \end{pmatrix}$, respectiv

$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 + b & 0 \\ 0 & 0 & 2 + c \end{pmatrix}$. Dacă n este numărul tripletelor (a, b, c)

pentru care are loc egalitatea $A^2 = B$, atunci

- $n = 2$ (100%)
- $n = 8$
- $n = 0$
- $n = \infty$

10. **S2-4**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie mulțimea $G = (0, 2)$ și legea de compoziție $x * y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}$

oricare ar fi $x, y \in G$. Dacă pentru orice $x \in G$ are loc egalitatea

$x * a = \frac{x}{3 - x}$, atunci

- $2a = 1$ (100%)
- $a = 1$
- $2a = 3$
- $3a = 1$

11. S2-5

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$, mulțimea $G = (0, 2)$ și legea de compoziție $x * y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}$, oricare ar fi $x, y \in G$. Dacă funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, 2)$, cu $f(x) = \frac{ax}{x+b}$, este un izomorfism între grupurile (\mathbb{R}_+^*, \cdot) și $(G, *)$, atunci

- $a^2 + b^2 = 5$ (100%)
- $a + b = 1$
- $ab = 1$
- $a^2 - b^2 = 5$

12. S2-6

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, mulțimea $G = (0, 2)$ cu legea de compoziție $x * y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}$, oricare ar fi $x, y \in G$ și izomorfismul $f : (0, 2) \rightarrow (0, \infty)$, cu $f(x) = \frac{x}{2-x}$ între grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) .
Dacă $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ și $b_n = 1 + \frac{1}{n}$, atunci

- $f(a_n * b_n) = 1$ (100%)
- $f(a_n * b_n) = n$
- $f((2 - a_n) * (2 - b_n)) = 2$
- $f((1 - a_n) * (b_n - 2)) = \frac{1}{2n + 1}$

13. S3-1

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Dacă funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$, atunci

- există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f'(c) + 2 = \frac{e^2 + 1}{e}$ (100%)
- există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f'(c) = \frac{(e + 1)^2}{e}$
- există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f'(c) + 2 = \frac{1}{e}$
- există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f'(c) = \frac{e^2 + 1}{e}$

14. **S3-2**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Dacă funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$, atunci

- $4xf''(x) + 2f'(x) = f(x)$ oricare ar fi $x > 0$ (100%)
- $4xf''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ oricare ar fi $x > 0$
- $4xf''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ oricare ar fi $x > 0$
- $4f''(x) + 2f'(x) = f(x)$ oricare ar fi $x > 0$.

15. **S3-3**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Dacă $a = \frac{e^{2\pi} + 1}{e^\pi}$ și $b = e^{\sqrt{10}} + e^{-\sqrt{10}}$, atunci

- $a - b > 0$
- $a - b < 0$ (100%)
- $ab < 0$
- $\frac{a}{b} > 1$

16. **S3-4**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie funcția $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x + 2\sqrt{|x|}$.

Dacă $I = \int_{-9}^{-4} f(x) dx$, atunci

- $6I + 43 = 0$ (100%)
- $6I = 347$

- $6I = 203$
- $6I = 187$

17. **S3-5**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a, b \in (0, \infty)$, cu $a < b$ și funcția $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x + 2\sqrt{|x|}$.

Dacă $I = \int_{-b}^{-a} \frac{\sqrt{-x} - 1}{x^2} dx$, atunci

- $I = f\left(-\frac{1}{a}\right) - f\left(-\frac{1}{b}\right)$ (100%)
- $I = f(-a) - f(-b)$
- $I = f\left(-\frac{1}{a^2}\right) - f\left(-\frac{1}{b^2}\right)$
- $I = f(-a^2) - f(-b^2)$

18. **S3-6**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie funcția $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x + 2\sqrt{|x|}$.

Dacă $\int_{-9}^m [xf'(x) + f(x)] dx < 27$, atunci

- $m \in (-\infty, -4)$ (100%)
- $m = 0$
- $m \in (-4, 0)$
- $m = -2$

Total of marks: 90