

Concursul MATEINFO, 2022

1. S1-1

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, cu $i^2 = -1$ și $\frac{z+i}{z+1} \in \mathbb{R}$, atunci

- $a + b + 1 = 0$ (100%)
- $(a + 1)^2 + b^2 = 0$
- $ab \neq (a + 1)(b + 1)$
- $a^2 + b^2 = 0$

2. S1-2

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a \in (0, \infty)$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = a + ax^2 - 2ax + 2022$.
Dacă m este valoarea minimă a funcției f , atunci

- $2m - f(1) = 2022$ (100%)
- $m = 2021$
- $m + a^2 < 2022$
- $m + f(1) = 2022$

3. S1-3

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Dacă x_1 și x_2 sunt cele două soluții reale ale ecuației $x^{2+\lg x} = 10^3$,
atunci

- $x_1 \cdot x_2 = 10^{-2}$ (100%)
- $x_1 + x_2 = 10^{-3}$
- $|x_1 - x_2| = 10^{-2}$
- $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = 10^{-1}$

4. S1-4

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Trei prieteni s-au hotărât să împartă echitabil costul unei călătorii efectuată împreună cu același taxi. Anton a coborât după 12 km, Barbu a coborât după încă 34 de km, iar Costin a mai mers singur 42 de

kilometri. La finalul călătoriei Costin a achitat suma de 44 de lei, ceea ce reprezintă prețul total al întregii călătorii. Dacă N reprezintă suma de bani pe care o primește Costin de la Anton și Barbu, atunci

- $N = 12.5$ (100%)
- $N = 29$
- $N = 30$
- $N = 10$

5. S1-5

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie numerele reale $a, b \in \mathbb{R}$. În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare $A(a, 1)$, $B(-1, b)$, $C(2, 3)$ și $D(3, 2)$ astfel încât $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$. Dacă $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$, atunci

- $|\vec{u}| = 2$ (100%)
- $|\vec{u}| = \sqrt{2}$
- $|\vec{u}| = 52$
- $|\vec{u}| = 2\sqrt{13}$

6. S1-6

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie A mulțimea tuturor soluțiilor ecuației $\operatorname{tg}x + \sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg}x = 1 + \sqrt{3}$. Dacă s este suma tuturor elementelor mulțimii $A \cap \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci

- $s = \frac{7\pi}{12}$ (100%)
- $s = \frac{12}{\pi}$
- $s = \frac{4}{\pi}$
- $s = \frac{\pi}{3}$

7. S2-1

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ și matricele $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dacă $(B \cdot A)^n = O_3$, atunci

- $n = 3$ (100%)
- $n = 2$
- $n = 1$
- $n = 4$

8. **S2-2**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ și matricele $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dacă $d = \det((AB)^2 - (BA)^3)$, atunci

- $d = 0$ (100%)
- $d = ab$
- $d = 1$
- $d = a^2b^2(1 - ab)$

9. **S2-3**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ și matricele $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dacă $M = (AB + BA)^2$, atunci

- $M - BA^2B = (BA)^2$ (100%)
- $M = (BA)^2$
- $M = (2BA)^2$
- $M - BA^2B = (2BA)^2$

10. **S2-4**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Pe mulțimea numerelor reale \mathbb{R} se consideră legea de compoziție

$$x * y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă $(x, y) \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \times \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, atunci

- $\sqrt{\cos(2x)} * \sqrt{\cos(2x)} = \sqrt{2} \left(\cos x \sqrt{\cos(2y)} + \cos y \sqrt{\cos(2x)} \right)$ (100%)
- $\sqrt{\cos(2x)} * \sqrt{\cos(2x)} = \cos x \sqrt{\cos(2y)} + \cos y \sqrt{\cos(2x)}$
- $\sqrt{\cos(2x)} * \sqrt{\cos(2x)} = \sqrt{2} \left(\cos x \sqrt{\cos(2y)} - \cos y \sqrt{\cos(2x)} \right)$
- $\sqrt{\cos(2x)} * \sqrt{\cos(2x)} = \cos x \sqrt{\cos(2y)} - \cos y \sqrt{\cos(2x)}$

11. S2-5

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Pe mulțimea numerelor reale \mathbb{R} se consideră legea de compoziție

$$x * y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă p este un număr natural impar, atunci

- $p * p$ este un număr irațional mai mare decât $2p$ (100%)
- $p * p$ este un număr natural nenul
- $p * p$ este un număr rațional mai mare decât $2p$
- $p * p$ este un număr irațional mai mic decât p

12. S2-6

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Pe mulțimea numerelor reale \mathbb{R} se consideră legea de compoziție

$$x * y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă p este un număr rațional strict pozitiv, atunci

- $p * p * p$ este un număr rațional sctric pozitiv (100%)
- $p * p * p$ este un număr irațional sctric mai mare decât 0
- $p * p * p$ este un număr rațional sctric mai mic decât 0

- $p * p * p$ este un număr irațional strict mai mic decât 0

13. **S3-1**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a \in (0, \infty)$ și funcția $f : [a, 3a] \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = 2(\sqrt{x-a} + \sqrt{3a-x})$.
Dacă pentru orice $x \in [a, 3a]$ are loc inegalitatea $f(x) \leq M$, atunci

- $M^2 = 16a$ (100%)
- $M^2 = 4a$
- $2M = 3\sqrt{a}$
- $3M = 2\sqrt{a}$

14. **S3-2**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a \in (0, \infty)$, $b \in (a, \infty)$ și funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$f(x) = 2(\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}).$$

Dacă n este numărul punctelor de extrem global ale funcției f , atunci

- $n = 3$ (100%)
- $n = 2$
- $n = 1$
- $n = 4$

15. **S3-3**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a \in (0, \infty)$, $b \in (a, \infty)$ și funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$f(x) = 2(\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} - \sqrt{b-a}).$$

Dacă N_m este numărul punctelor de intersecție dintre graficul funcției f și dreapta de ecuație $2mx - 2y = m(a+b)$, cu $m \in \mathbb{R}$, atunci

- $N_m = 1$ oricare ar fi $m \in \mathbb{R}^*$ (100%)
- $N_m = 2$ oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$

- $N_m = 2$ oricare ar fi $m \in \left(0, 2 \left(\sqrt{2} - 1\right) \sqrt{b-a}\right)$
- $N_m = 0$ oricare ar fi $m \in \left(2 \left(\sqrt{2} - 1\right) \sqrt{b-a}, \infty\right)$

16. **S3-4**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Fie $a \in (a, 1)$ și funcția $f : [a, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = 3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$. Dacă

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^1 \frac{x^{n+2} \cdot f(x)}{3x^2 - x + 2} dx,$$

atunci

- $L = 0$ (100%)
- $L = \frac{1}{4}$
- $L = 4$
- $L = \infty$

17. **S3-5**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Dacă $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{3x^2 - x + 2} dx$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

- $9I_4 - 3I_3 + 6I_2 = 1$ (100%)
- $9I_4 - 3I_3 + 6I_2 = \frac{1}{3}$
- $3I_4 + 2I_2 = 1 + I_3$
- $3I_4 + 2I_2 = 1 - I_3$

18. **S3-6**

MULTI 5 points 0.10 penalty Single Shuffle

Dacă șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ are termenul general

$$I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{3x^2 - x + 2} dx, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*$$

și $L = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, atunci

- $4L = 1$ (100%)
- $2L = 1$
- $L = 0$
- $L = \infty$

Total of marks: 90