UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Concursul de Matematică - Informatică

organizat de către

Departamentul de Matematică şi Informatică, Facultatea de Ştiinţe, Centrul Universitar Nord din Baia Mare, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

11 Mai 2023
clasa a XII-a

Toate subiectele sunt obligatorii. Pentru fiecare subiect este necesară rezolvarea completă.
Se acordă din oficiu **10 puncte**. Timp de lucru **două ore!**

Subiectul I – 30 puncte

1.) Determinaţi valoarea produsului $p = \frac{43}{46} \cdot \left(1 + \frac{1}{2021}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2022}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2023}\right) \cdot \frac{47}{44}$.

2.) Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A\left(a, a^2\right)$ aparţine grafiului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = x^2 + 4x - 8$.

3.) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $1 + \lg(x - 10) = \lg(5x)$.

4.) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(3, -1)$ şi $D(0, -2)$. Arătaţi că dreptele AC şi BD sunt perpendiculare.

5.) Determinaţi raza cercului înscris într-un triunghi dreptungic cu lungimea ipotenuzei de 25 cm, iar lungimea unei catete de 7 cm.

Subiectul II – 30 puncte

1. Fie $a \in \mathbb{R}$, matricea

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 \\ a^2+3a+2 & a^2+2a & a^2+a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(R)$$

şi sistemul de ecuaţii liniare

$$(S)\quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + (a+1)y + (a+2)z = 0 \\ \left(a^2+3a+2\right)x + \left(a^2+2a\right)y + \left(a^2+a\right)z = 0. \end{cases}$$

a) Arătaţi că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $2 - \det(A(a)) = 0$.

b) Determinaţi soluţia sistemului (S).

c) Arătaţi că există o infinitate de valori ale lui $a \in \mathbb{N}$ pentru care sistemul (S) are soluţia (x_0, y_0, z_0), cu $x_0 \in \mathbb{Z}$, $y_0 \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{Z}$.

2. Fie numerele reale strict pozitive $a, b \in (0, \infty)$ şi polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX - 1 \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Pentru $a = b$, determinaţi $f(1)$.

b) Arătaţi că orice număr real $\alpha \in (-\infty, 0)$ nu poate fi rădăcină a polinomului f.

c) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f are o rădăcină triplă.

Subiectul III – 30 puncte

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot \left(1 - x^3\right)$.

a) Arătaţi că derivata funcţiei f este $f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x^5\right)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x - 1}$.

c) Arătaţi că pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $f(x) + f(y) + f(z) \leq \frac{1}{8}$.

2. Fie funcţia $f : [0, 1] \to [0, 1]$, cu $f(x) = \frac{x + 2x^3}{1 + x^2 + x^4}$.

a) Calculaţi $\int_0^1 \left(x^4 + x^2 + 1\right) \cdot f(x)\, dx$.

b) Calculaţi $\int_0^1 f(x)\, dx$.

c) Arătaţi că aria suprafeţei plane determinate de dreptele $x = 0$, $x = 1$, axa Ox şi graficul funcţiei f este strict mai mare decât $\frac{1}{2}$.